

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 468 FONKSİYONEL ANALİZ BÜTÜNLEME
SINAVI SORULARI

Not: Sınav toplam 8 sorudan oluşmaktadır. **06.07.2021** Salı günü **13:00-14:30** arasında gerçekleşecektir. Süre 90 dakikadır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar **değerlendirilmeyecektir**. İlk 5 soru 10 ar puan, diğerleri eşit puanlıdır. Başarılar

1) Aşağıdaki $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarından hangileri \mathbb{R}^2 üzerinde bir metrik tanımlar? Nedenini açıklayınız.

I. $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

II. $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

III. $d_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \left(|x_1 - y_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2 - y_2|^{\frac{1}{2}}\right)^2$

IV. $d_4((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \left(|x_1 - y_1|^3 + |x_2 - y_2|^3\right)^{\frac{1}{3}}$

A) I, II B) II, III C) I, II, III D) I, IV E) I, II, IV

2) Aşağıdakilerden hangisi doğrudur? Neden?

A) $A = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ bir kapalı alt kümedir.

B) $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right): n \in \mathbb{N}\right\}$ nin yığılma noktaları kümesi $A' = \{(0,0), (0,1)\}$ dir.

C) $A = \{(x, y): 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ kümesinin içi $A^\circ = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ dir.

D) $A = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ kümesinin kapanışı $\bar{A} = A$ dir.

E) Hiçbiri

(Not: (\mathbb{R}^2, d) , d Öklid metriği)

3) Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ olmak üzere $(\bar{A})^\circ = \emptyset$ ise A ya bazı yerlerde yoğun küme denir.

B) \mathbb{N} alt kümesi \mathbb{R} de birinci kategoridendir.

C) \mathbb{Q} alt kümesi \mathbb{R} de birinci kategoridendir.

D) \mathbb{R} kümesi ikinci kategoridendir.

E) Hiçbiri

- 4) Bir (X, d) metrik uzayının (\hat{X}, \hat{d}) tamlaması için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
- A) X ile \hat{X} izometrik izomorftur.
 - B) (\hat{X}, \hat{d}) izomorfizma farkıyla tektir.
 - C) (\hat{X}, \hat{d}) tam metrik uzaydır.
 - D) X, \hat{X} de yoğundur.
 - E) Hiçbiri
- 5) X ve Y iki normlu uzay, $T: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olmak üzere aşağıdakilerden hangisi her zaman doğru olmayabilir?
- A) T sürekli ise sınırlıdır.
 - B) T bir noktada sürekli ise her noktada sürekli dir.
 - C) T sürekli ise sıfır uzay kapalıdır.
 - D) T sınırlı ise sürekli dir.
 - E) T sınırlı ise sıfır uzayı açıktır.
- 6) Metrik uzay ile normlu uzay ilişkisini ifade ediniz, iddianızı açıklayınız.
- 7) $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ sabit olsun. $T: X \rightarrow X, T(f) = x^n f(x)$ olarak tanımlanan T nin lineer ve sınırlı olduğunu gösteriniz. $f(x) = x$ ise $\|T\| = 1$ olduğunu ispatlayınız.
- 8) Bir iç çarpım uzayında $\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$ olduğunu gösteriniz.

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

FONKSİYONEL ANALİZ BÜTÜNLEME

① Aşağıdaki $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarından hangileri \mathbb{R}^2 üzerinde bir metrik tanımlar? Nedenini açıklayınız.

$$I) d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$II) d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

$$III) d_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (|x_1 - y_1|^{1/2} + |x_2 - y_2|^{1/2})^2$$

$$IV) d_4((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (|x_1 - y_1|^3 + |x_2 - y_2|^3)^{1/3}$$

A) I, II B) II, III C) I, II, III D) I, IV E) I, II, IV

② Aşağıdakilerden hangisi doğrudur? Neden?

A) $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ bir kapalı alt kümedir.

B) $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ nin yığılma noktaları kümesi $A' = \{(0, 0), (0, 1)\}$ dir.

C) $A = \{(x, y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\} \subset \mathbb{R}^2$, nin $A^\circ = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ dir.

D) $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ kümesinin kapanışı $\hat{A} = A$ dir.

E) Hiçbiri

(Not, (\mathbb{R}^2, d) , d öklid metriği)

③ Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ olmak üzere $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ ise A ya bazı yerlerde yoğun küme denir.

B) \mathbb{N} alt kümesi \mathbb{R} de birinci kategoridir.

C) \mathbb{Q} alt kümesi \mathbb{R} de birinci kategoridir.

D) \mathbb{R} kümesi ikinci kategoridir.

E) Hiçbiri

4) Bir (X, d) metrik uzayının (\hat{X}, \hat{d}) tamlaması için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır.

A) X ile \hat{X} izometrik izomorftur.

B) (\hat{X}, \hat{d}) izometrik izomorfizma farkıyla taktır.

C) (\hat{X}, \hat{d}) tam metrik uzaydır.

D) X, \hat{X} de yoğunudur.

E) Hiçbiri

5) X ve Y iki normlu uzay, $T: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olmak üzere aşağıdakilerden hangisi her zaman doğru olmayabilir?

A) T sürekli ise sınırlıdır.

B) T bir noktada sürekli ise her noktada sürekli'dir.

C) T sürekli ise sıfır uzayı kapalıdır.

D) T sınırlı ise sürekli'dir.

E) T sınırlı ise sıfır uzayı açıktır.

6) Metrik uzay ile normlu uzay ilişkisini ifade edin, iddianızı ispatlayınız.

Çözüm: Her normlu uzay bir metrik uzaydır.

Tersi genel olarak doğru değildir. Nedeni notlarda var.

7) $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ sabit olsun. $T: X \rightarrow X, T(f) = x^n f(x)$ olarak tanımlanan T 'nin lineer ve sınırlı olduğunu gösteriniz. $f(x) = x$ ise $\|T\| = 1$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $T(f+g) = x^n (f(x)+g(x)) = T(f) + T(g), \alpha \in \mathbb{F}$ 'in

$T(\alpha f) = x^n \alpha f(x) = \alpha x^n f(x)$ olduğundan T lineer ve

$$\|T(f)\| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

oldüğundan T sınırlı ve $\|T\| \leq 1$ dir.

$f(x) = x$ ise $\|x\| = 1$ ve $x \in [0,1]$ için $\|T(f)\|_\infty = \|x^{n+1}\|_\infty = 1$ dir.

8) Bir iç çarpım uzayında $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$

$\Rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} - \sqrt{\langle y, y \rangle} \leq \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$ ve benzer şekilde

$$-(\sqrt{\langle x, x \rangle} - \sqrt{\langle y, y \rangle}) \leq \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$$

oldüğundan $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$ dir.